

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\frac{n \arctan n}{\sqrt{n}}, \quad (n^2 + n + 1)^{\frac{1}{2}} - (n^2 + 2n + 3)^{\frac{1}{2}}, \quad (-1)^n + (-1)^{n+1}, \quad \cos(\pi n) + (-1)^n$$

Per quelle non convergenti individuare i limiti delle sottosuccessioni convergenti.

Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti successioni

$$\frac{2^{3n} + 49^{n/2}}{1 + 2^n - 3 \cdot 2^{\frac{3}{5}n}}, \quad \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1 + \frac{2}{n^n}\right)^{n!}$$

Esercizio 3 Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n a_n + 1}{n^2 + 2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Esercizio 4 Dati $A, B \in \mathbb{R}$, sia $a_n := n^2 + A n + B$. Per quali scelte di A e B , la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B , la successione a_n è definitivamente monotona?

Esercizio 5 Sia a_n la successione che verifica:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2 a_n + 1.$$

Si dice che a_n è definita per ricorrenza.

- i. Dimostrare per induzione che la successione è a termini positivi ed è strettamente crescente;
- ii. dimostrare che la successione a_n è divergente;
- iii. determinare la forma esplicita di a_n .

Esercizio 6 Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right).$$

- i. dimostrare che la successione è a termini positivi;
- ii. mostrare che la successione è monotona decrescente e dedurne l'esistenza del limite;
- iii. provare che il limite $\ell \leq 4$ e calcolarlo.

Esercizio 7 Data una successione a_n provare che se la sottosuccessione a indici pari a_{2n} e quella a indici dispari a_{2n+1} convergono a ℓ allora tutta la successione converge a ℓ .

Dedurne che la successione

$$\frac{(-4)^n + 3}{(3^n + n)^2}$$

è convergente.

Esercizio 8 Dire perché esiste, e calcolarlo, il limite delle seguenti successioni

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Per determinare il limite di b_n è utile osservare che $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (la somma che definisce b_n si dice telescopica).

Esercizio 9 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione;

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6 \Leftrightarrow \forall 0 < \varepsilon < 2, \exists N_\varepsilon \geq 16 : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - 6| \leq 5\varepsilon.$ V F
2. $\exists N \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon > 0, |a_n - 1| \leq \varepsilon \forall n > N \Leftrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è definitivamente costante. V F
3. $\exists N \in \mathbb{N}, \exists \varepsilon > 0 : |a_n - 5| \leq \varepsilon \forall n > N \Leftrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata. V F
4. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è convergente $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |na_n| = +\infty.$ V F

Esercizio 10 Per ogni successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si ha;

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$ V F
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{|a_n|}}{|a_n|} + ne^{a_n} = +\infty.$ V F
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$ per ogni successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è definitivamente nulla. V F
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{e^n} = 0.$ V F

Esercizio 11 Per ogni successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

1. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona. V F
2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata inferiormente. V F
3. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata. V F
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$ V F

Esercizio 12 Per ogni coppia di successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotone crescenti si ha:

1. $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione monotona. V F
2. Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata, allora $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è oscillante. V F
3. Se $a_3 = 4$ e $b_4 = 3$, allora $\{a_n b_n\}$ è convergente o divergente a $+\infty.$ V F
4. $\{a_n - b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge se e solo se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergono. V F

Notazione: Una successione può essere indicata usando il suo elemento ennesimo (la successione a_n) o indicando la collezione degli elementi della successione al variare di n (la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$).